

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANDRÉS PÁEZ DE SOTOMAYOR <i>"Dios, Ciencia y Responsabilidad"</i> 2020		
Potenciación y sus propiedades		Asignatura: Matemáticas	Nota
		Fecha:	
		Docente: Wilmer Peña O.	

El principal uso que le podemos dar a la potenciación es el de poder escribir números muy grandes como 64.339.296.880 o muy pequeños como 0,000001, de una manera mas corta.

$$64.339.296.880 = 35^7$$

$$0,000001 = 10^{-6}$$

Con la potenciación también se pueden formular expresiones que representen fenómenos en biología, química, física entre otras áreas. Por ejemplo, en finanzas se calcula el valor futuro mediante la expresión:

$$S = P(1 + i)^n$$

Para concluir esta introducción, podemos decir que **la potenciación es la operación que permite expresar, en forma simplificada, la multiplicación de varios factores iguales.**

* Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

$$a^n = a \times a \times a \times a \times a \times \dots \times a \quad (n \text{ veces } a)$$

y

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{con } a \neq 0$$

* Si $n = 0$, $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces, $a^0 = 1$

Ejemplo 1. Hallar la potencia en cada caso.

a. $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$

c. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

d. $(-9)^3 = (-9) \times (-9) \times (-9) = -729$

Ejemplo 2. Expresar la siguiente fracción como una potencia de exponente entero negativo.

$$\frac{1}{(5)(5)(5)(5)(5)(5)}$$

$$\frac{1}{(5)(5)(5)(5)(5)(5)} = \frac{1}{5^6} = 5^{-6}$$

Propiedades de la potenciación

Estas propiedades se utilizan para simplificar expresiones numéricas (sólo números) y algebraicas (números y letras)

Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ y que $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces se cumplen:

1. Producto de potencias de igual base: para multiplicar dos potencias de igual base y diferente exponente, se deja la misma base y se suman los exponentes. Es decir,

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. Cociente de potencias de igual base: para dividir dos potencias de igual base y diferente exponente, se deja la misma base y se resta los exponentes. Es decir,

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ donde } a \neq 0$$

3. Potencia de una potencia: para elevar una potencia a un exponente, se deja la base y se multiplican los exponentes. Es decir,

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4. Potencia de un producto: todo producto elevado a un exponente es igual al producto de las potencias de cada factor. Es decir,

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n$$

5. Potencia de un cociente: todo cociente elevado a un exponente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor. Es decir,

$$(a/b)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ donde } b \neq 0$$

6. Potencia con exponente uno: todo número real elevado al exponente uno, da como resultado el mismo número real. Es decir,

$$a^1 = a$$

7. Potencias con exponente negativo: toda potencia con un exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la base, elevada al exponente positivo. Es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ donde } a, b \neq 0$$

Ejemplo 3. Determinar el valor de cada potencia aplicando las propiedades de la potenciación.

a. $\left(\frac{2^4 \cdot 2^7}{2^6}\right)^{-3}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^4 \cdot 2^7}{2^6}\right)^{-3} &= \left(\frac{2^{11}}{2^6}\right)^{-3} && \text{Se aplica la Prop. 1} \\ &= (2^5)^{-3} && \text{Se aplica la Prop. 2} \\ &= 2^{-15} && \text{Se aplica la Prop. 3} \\ &= \left(\frac{1}{2^{15}}\right) && \text{Se aplica la Prop. 7} \\ &= \frac{1}{32768} && \text{Se halla la potencia} \end{aligned}$$

Puedes ver este ejercicio con una breve explicación adicional dando clic en: <https://www.thinglink.com/card/1297345342613749763>

b. $\frac{(3^2)(4)(5^3)}{(2^{-2})(-25)}$

$$\begin{aligned} \frac{(3^2)(4)(5^3)}{(2^{-2})(-25)} &= \frac{(3^2)(2^2)(5^3)}{(2^{-2})(-5^2)} && \text{Se expresan como potencias el 4 y el 5} \\ &= -\frac{(3^2)(2^2)(5^3)}{(2^{-2})(5^2)} && \text{Se ubica el } - \text{ del 5 delante de la fracción} \\ &= -\frac{(3^2)(2^2)(5^3)(2^2)}{5^2} && \text{Se aplica la Prop. 7 al 2 con exponente negativo} \\ &= -\frac{(3^2)(2^4)(5^3)}{5^2} && \text{Se aplica la Prop. 1 a las potencias de base 2} \\ &= -(3^2)(2^4)(5^1) && \text{Se aplica la Prop. 2 a las potencias de base 5} \\ &= -(9)(16)(5) && \text{Se resuelven las potencias} \\ &= -720 && \text{Se resuelve la multiplicación} \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

a.

$$\begin{aligned} \frac{-50x^8y^3z^2}{200x^5y^9z} &= -\frac{x^8y^3z^2}{4x^5y^9z} && \text{Se simplifican los coeficientes} \\ &= -\frac{1}{4}x^{8-5}y^{3-9}z^{2-1} && \text{Se aplica la Prop. 2} \\ &= -\frac{1}{4}x^3y^{-6}z && \text{Se restan los exponentes} \\ &= -\frac{x^3z}{4y^6} && \text{Se expresa el resultado con exponentes positivos} \end{aligned}$$

$$\text{b. } \left(\frac{a^4b^2}{6c^5}\right) \left(\frac{3a^3b^2}{c^3}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^4b^2}{6c^5}\right) \left(\frac{3a^3b^2}{c^3}\right)^2 &= \left(\frac{a^4b^2}{6c^5}\right) \left(\frac{9a^6b^4}{c^6}\right) \\ &= \frac{3a^{10}b^6}{2c^{11}} \end{aligned}$$

Se aplica la prop. 3

Se aplica la Prop. 1 y se simplifican los coeficientes

Ejercicios:

1. Resuelve el test que se encuentra en:

<https://www.matesfacil.com/tests/potencias/nivel2/test-examen-online-propiedades-potencias-preguntas.html>

2. Determina el valor de cada potencia aplicando las propiedades de la potenciación y luego verificar con la calculadora.

$$\text{a. } (-3)^2 + (-5)^2$$

$$\text{b. } \frac{(5^{-2})(5^4)(125)}{(25)(5^{-3})}$$

$$\text{c. } 2 + 2^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2^0$$

$$\text{d. } \left(\frac{2^4 \cdot 2^5 \cdot 3^{-5}}{2^0 \cdot 3^{-2}}\right)^{-2}$$

3. Simplifica las siguientes expresiones.

$$\text{a. } (x^2y^5)^3$$

$$\text{e. } (m^{-2}nx^{-3}y^{-5})^{-10}$$

$$\text{b. } (a^3b^2)^2(a^4b)^{-3}$$

$$\text{f. } (ab^2c^{-3})^{-2}(ab^2c)$$

$$\text{c. } \left(\frac{m^2n^3p^4}{m^5np^{-2}}\right)^{-1}$$

$$\text{g. } \left(\frac{6ab^{-4}}{3a^{-2}b^{-2}}\right) \left(\frac{5ab^2}{2a^{-3}b}\right)^{-1}$$

$$\text{d. } \frac{8x^4y^{-8}}{4x^{-1}y^3}$$

$$\text{h. } \frac{(2a^3b^4)^{-5}}{(64a^{-3}b^{-2})^{-1}}$$

Rta. ejercicio 3.

$$\text{a. } x^6y^{15}$$

$$\text{b. } \frac{b}{a^6}$$

$$\text{c. } \frac{m^3}{n^2p^6}$$

$$\text{d. } \frac{2x^5}{y^{11}}$$

$$\text{e. } \frac{m^{20}x^{30}y^{50}}{n^{10}}$$

$$\text{f. } \frac{c^7}{ab^2}$$

$$\text{g. } \frac{4}{5ab^3}$$

$$\text{h. } \frac{2}{a^{18}b^{22}}$$