

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANDRES PAEZ DE SOTOMAYOR "Dios, Ciencia y Responsabilidad" 2020		
Ecuación cuadrática	Asignatura: Matemáticas	Nota	
	Fecha: 20 de enero de 2020		
	Docente: Wilmer Peña O.		

Son ecuaciones de segundo grado las ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{donde } a, b \text{ y } c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Ejemplos de ecuaciones de segundo grado son las siguientes:

$$2x^2 + 3x + 4 = 0, \quad -3t^2 + 4 = 0, \quad 5x^2 = 0, \quad y^2 + 4y = 0, \quad \frac{2}{3}x^2 + 3x - 2 = 0$$

Solucionar una ecuación es encontrar el valor o los valores de la incógnita, ya sea x , y , t , etc. que satisfagan dicha ecuación.

Observemos que en cada una de las ecuaciones anteriores podemos identificar los valores de a , b y c .

Ecuación	a	b	c
$2x^2 + 3x + 4 = 0$	2	3	4
$-3t^2 + 4 = 0$	-3	0	4
$5x^2 = 0$	5	0	0
$y^2 + 4y = 0$	1	4	0
$\frac{2}{3}x^2 + 3x - 2 = 0$	$\frac{2}{3}$	3	-2

Discriminante de la ecuación

En una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ podemos identificar el valor del **discriminante**, el cual está dado por

$$D = b^2 - 4ac$$

* Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene 2 soluciones reales iguales.

* Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene 2 soluciones reales diferentes.

* Si $D < 0$, entonces la ecuación tiene 2 soluciones complejas.

Ejemplo 1. Hallar el discriminante de la ecuación $2x^2 + 5x - 10 = 0$.

Como $a = 2$, $b = 5$ y $c = -10$, entonces

$$D = 5^2 - 4(2)(-10) = 25 - (-80) = 25 + 80 = 105$$

Por lo tanto, como $D = 105 > 0$ la ecuación tiene 2 soluciones reales diferentes.

Si queremos saber si un número es solución de una ecuación dada, debemos reemplazar este valor en la ecuación y analizar si esta se satisface.

Por ejemplo, las soluciones a la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0$, son $x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$ ya que si reemplazamos el valor de x ya sea por 1 o por $\frac{1}{2}$ se tendría,

$$2(1)^2 - 3(1) + 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

Soluciones de la ecuación cuadrática

Para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ debemos tener presente que esta puede ser: completa o incompleta.

$$\text{Ecuación cuadrática completa: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{Ecuación cuadrática incompleta: } ax^2 + bx = 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + c = 0$$

Ecuación incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$

Cuando la ecuación tiene esta forma debemos factorizar por el método de factor común, en este caso la x

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, para que esta multiplicación sea 0, es porque $x = 0$ (primera solución) o $ax + b = 0$, es decir, $x = -\frac{b}{a}$ (segunda solución) la cual se obtiene de despejar la x .

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = 0$ son

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$

En este caso lo único que debemos hacer es despejar el valor de x , es decir,

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \\ x &= \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + c = 0$ son

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ecuación completa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Para finalizar, si la ecuación es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede aplicar la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esto quiere decir que las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos algunos ejemplos,

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $2x^2 - 4x = 0$

Lo primero que debemos hacer es identificar la forma de la ecuación, esta ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$, tenemos que $a = 2$ y $b = -4$, por lo tanto, las soluciones son

$$x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = -(-2) = 2$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$

La forma de la ecuación es $ax^2 + c = 0$, por lo tanto, los valores de a y c son $a = 1$ y $c = -9$. Las soluciones son

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} = \sqrt{-\frac{-9}{1}} = \sqrt{9} = 3 \quad y \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{-9}{1}} = -\sqrt{9} = -3$$

Ejemplo 4. Resolver la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$

La ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a = 1$, $b = -1$ y $c = -2$, aplicando la fórmula expuesta anteriormente para este caso, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \\ x_1 &= \frac{1 + \sqrt{(1 - (-8))}}{2} \\ x_1 &= \frac{1 + \sqrt{9}}{2} \\ x_1 &= \frac{1 + 3}{2} \\ x_1 &= \frac{4}{2} \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

y la segunda solución sería con signo $-$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{(1 - (-8))}}{2} \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{9}}{2} \\ x_2 &= \frac{1 - 3}{2} \\ x_2 &= \frac{-2}{2} \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación serán $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

También podemos tener ecuaciones donde se deban resolver algunas operaciones antes de identificar la forma de la ecuación.

Ejemplo 5. Identificar la forma de la ecuación $5x - x^2 = 10x$

Para identificar la forma de la ecuación debemos igualar a cero la expresión dada pasando los términos a un lado del signo igual.

$$\begin{array}{rcll} 5x - x^2 & = & 10x & \\ 5x - x^2 - 10x & = & 0 & \text{Pasando el } 10x \text{ a restar a la izquierda} \\ -5x - x^2 & = & 0 & \text{Sumando los términos con } x \\ -x^2 - 5x & = & 0 & \text{Ordenando} \end{array}$$

Luego la ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$ con $a = -1$ y $b = -5$. Debemos tener en cuenta que la ecuación $-x^2 - 5x = 0$ se puede escribir como $x^2 + 5x = 0$ y en este caso $a = 1$ y $b = 5$ lo cual también es correcto.

Para que puedas aprender lo expuesto anteriormente debes realizar cada una de las siguientes actividades en tu cuaderno de ejercicios:

Ejercicios:

1. Completa la tabla

Ecuación	a	b	c	Tipo
$2x^2 - 3x + 5 = 0$				
$2y^2 - 4 = 0$				
$x + x^2 - 2 = 0$				
$x^2 - 6x = 0$				
$-t^2 + 5t = -10$				

2. Resuelve las ecuaciones cuadráticas siguientes.

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

f. $x^2 - 4x = -4$

b. $2x^2 - 7x + 3 = 0$

g. $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

c. $-x^2 + 7x - 10 = 0$

h. $3x^2 + 4x = 0$

d. $x^2 - 16 = 0$

i. $3x - x^2 = 0$

e. $x^2 + x + 1 = 0$

j. $x^2 = 1$